spécialité

MATHS

Méthode simple et efficace d'apprentissage

1re

- Questions-réponses
- Exercices et corrigés
- Cartes mentales
- Flashcards à découper
- Formulaires

ellipses

1

SUITES NUMÉRIQUES

LES 10 QUESTIONS

1 C'est quoi une suite $\left(u_n\right)$?

↳ ....

....

2 C'est quoi une suite définie par une formule explicite ?

↳ ....

....

3 C'est quoi une suite définie par une formule de récurrence ?

↳ ....

....

4 C'est quoi une suite arithmétique ?

↳ ....

....

5 C'est quoi une suite géométrique ?

↳ ....

....

6 C'est quoi la raison ?

↳ ....

....

7 C'est quoi une modélisation par une suite ?

↳ ....

....

8 C'est quoi la nature d'une suite ?

↳ ....

....

9 C'est quoi la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$?

↳ ....

....

10 C'est quoi une suite croissante ? Décroissante ?

↳ ....

....

ÉNONCÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1 Le poulailler et l'enclos

a Le 15 avril, un éleveur installe au soir deux cents poules pondeuses dans son gigantesque poulailler. Chacune d'entre elles pond à la cadence d'un œuf chaque matin. À l'aide d'une modélisation par une suite, dont on précisera la nature et le sens de variation, déterminer à quelle date, le nombre d'œufs atteindra les trois mille.

b Un autre éleveur ne s'est pas aperçu que six renards arrivaient à pénétrer dans l'enclos de ses poulets. Sachant que cet éleveur possédait deux mille poulets le 15 avril, et que chaque renard prélève un poulet chaque jour, déterminer à l'aide d'une modélisation par une suite, dont on précisera la nature et le sens de variation, à quelle date l'éleveur possédera moins de 90 % de poulets.

EXERCICE 2 Les nénuphars et la rumeur

a Dans un étang se trouvent des nénuphars. Chaque année le nombre de nénuphars double. En 2024, il y avait trois nénuphars. Déterminer à l'aide d'une modélisation par une suite, dont on précisera la nature et le sens de variation, en quelle année le nombre de nénuphars sera supérieur à trois cents.

b Dans un village, une rumeur se propage. Sachant qu'une seule personne au départ a lancé la rumeur et que chaque personne informée colportera à son tour cette rumeur chaque jour à deux autres personnes (non informées), déterminer à l'aide d'une modélisation par une suite, dont on précisera la nature et le sens de variation, au bout de combien de temps les deux mille âmes de ce village seront toutes informées de la rumeur.

EXERCICE 3 Placement à intérêts simples, placement à intérêts composés

Un placement à intérêts simple est un placement où seul le montant initial est pris en compte. Un placement à intérêts composés, est un placement qui s'applique sur le montant initial mais également sur les intérêts accumulés.

Le 1^er^ janvier 2024, on place :

- 1 000 € à 5 % d'intérêts simples sur le compte A.
- 1 000 € à 3 % d'intérêts composés sur le compte B.

a À l'aide de deux modélisations par des suites dont on précisera la nature et le sens de variation, déterminer les sommes disponibles sur chacune des comptes A et B le 1^er^ janvier 2025, puis le 1^er^ janvier 2026.

b À l'aide d'un programme Python, déterminer à partir de quelle année (au 1^er^ janvier), le compte B atteindra un montant supérieur à celui du compte A.

EXERCICE 4 Solution bactérienne

Dans un laboratoire à 07 h 00, on dispose d'une solution aqueuse contenant une population de 100 000 bactéries. Chaque heure, il en meurt 4 %.

a À l'aide d'une modélisation par une suite dont on précisera la nature et le sens de variation, déterminer le nombre de bactéries présente dans la solution à 10 h 00.

b À l'aide d'un programme Python, déterminer au bout de combien d'heures, le nombre de bactéries présente dans la solution sera inférieur à 80 000 ?

EXERCICE 5 Isolation phonique

Une source sonore perd 10 % de son intensité à chaque fois qu'elle traverse une plaque d'isolation phonique.

a À l'aide d'une modélisation par une suite dont on précisera la nature et le sens de variation, déterminer l'intensité d'une source sonore initiale de 120 dB après avoir traversé deux plaques d'isolation.

b À l'aide d'un programme Python, déterminer le nombre de plaques nécessaires, pour atteindre moins de 50 dB (à partir de la même source initiale de 120 dB).

EXERCICE 6 La légende de Sissa

Sissa est un philosophe indien connu pour son invention du jeu d'échecs (constitué d'un damier de 64 cases). Pour le remercier de cette invention de ce jeu extrêmement divertissant, le Roi lui promet de lui offrir un grain de riz pour la 1re case, deux grains de riz pour la 2e, quatre grains de riz pour la 3e, huit pour la 4e, etc.

Malheureusement le roi ne peut pas tenir sa promesse. Expliquer pourquoi.

EXERCICE 7 Question ouverte

Quel polygone régulier admet un nombre de diagonales supérieur à cent ?

EXERCICE 8 Un coup de pouce de Python

Pour donner une approximation de $\sqrt{a}$, la méthode de Héron d'Alexandrie consiste à utiliser la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{a}{u_n}}{2} \end{cases}$.

Écrire une fonction Python permettant par cette suite d'obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ (on pensera à utiliser l'instruction conditionnelle if-else).

CORRIGÉS DES QUESTIONS

1 C'est quoi une suite ?

+ Une suite u ou (u_n) est une fonction de l'ensemble des entiers naturels dans l'ensemble des nombres réels. La variable est notée n, l'image est notée u_n ou bien $u(n)$.

2 C'est quoi une suite définie par une formule explicite ?

+ Une suite (u_n) est définie par une formule explicite lorsqu'elle est exprimée par une simple formule dépendant de la variable n.

3 C'est quoi une suite définie par une formule de récurrence ?

+ Une suite (u_n) est définie par une formule de récurrence lorsque chaque nouveau terme u_{n+1} est exprimé en fonction du terme précédent u_n.

4 C'est quoi une suite arithmétique ?

+ Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + r$. Une suite arithmétique traduit une évolution à accroissement constant.

5 C'est quoi une suite géométrique ?

+ Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n \times q$. Une suite géométrique traduit une évolution à taux constant.

6 C'est quoi la raison ?

+ La raison d'une suite arithmétique (u_n) est l'accroissement constant r.

  La raison d'une suite géométrique (u_n) est le nombre q défini par $q = 1 + \frac{t}{100}$ (resp. $q = 1 - \frac{t}{100}$) s'il s'agit d'une augmentation (resp. diminution) à taux constant de t %.

7 C'est quoi une modélisation par une suite ?

✚ Une modélisation par une suite consiste à traduire une situation biologique, économique, géométrique, etc. par

- Une suite arithmétique s'il s'agit d'une évolution à accroissement constant ;
- Une suite géométrique s'il s'agit d'une évolution à taux constant.

Une modélisation est souvent accompagnée d'un programme Python permettant de connaître l'évolution de la suite à court ou à long terme.

8 C'est quoi la nature d'une suite ?

✚ Donner la nature d'une suite consiste à dire si elle est arithmétique ou bien géométrique et à préciser la valeur de sa raison r ou q.

9 C'est quoi la somme $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$?

✚ La somme $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$ vaut :

- $(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$ si (u_n) est arithmétique ;
- $u_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si (u_n) est géométrique de raison $q\neq 1$.

10 C'est quoi une suite croissante ? Décroissante ?

✚ Une suite (u_n) est :

- croissante lorsque $u_n<u_{n+1}$ pour tout n ;
- décroissante lorsque $u_n>u_{n+1}$ pour tout n.

Précisons qu'une suite arithmétique est :

- croissante lorsque sa raison r est positive ;
- décroissante lorsque sa raison r est négative.

Précisons également qu'une suite géométrique positive est :

- croissante lorsque sa raison q est supérieure à 1 ;
- décroissante lorsque sa raison q est comprise entre 0 et 1.

CORRIGÉS DES EXERCICES

EXERCICE 1 Le poulailler et l'enclos

a Modélisons la situation par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'œufs produits au total jusqu'au $n+1$-ième jour. D'après l'énoncé, on a $u_0 = 0$ (car au départ, il n'y a aucun œuf). Comme 200 œufs apparaissent chaque jour, le nombre d'œufs est égal au nombre d'œufs précédent augmenté de 200. On a donc $u_{n+1} = u_n + 200$. (u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 200$. Comme $r > 0$ la suite (u_n) est croissante. La formule $u_n = u_0 + nr$ nous donne $u_n = 0 + 200n$ c'est-à-dire $u_n = 200n$. Résolvons l'équation $u_n = 3\,000$. Cela nous donne $200n = 3\,000$ c'est-à-dire $n = \dfrac{3\,000}{200} = 15$. Ainsi c'est au 16e jour, c'est-à-dire le 1er mai, qu'on aura produit un total de 3 000 œufs.

b Modélisons la situation par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de poulets présents au $n+1$-ième jour. D'après l'énoncé, on a $u_0 = 2\,000$ (car au départ, il y a 2 000 poulets). Comme 6 poulets disparaissent chaque jour, le nombre de poulets est égal au nombre de poulets précédent diminué de 6. On a donc $u_{n+1} = u_n - 6$. (u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = -6$. Comme $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante. La formule $u_n = u_0 + nr$ nous donne $u_n = 2\,000 - 6n$. Résolvons l'équation $u_n = 1\,800$ (car $2\,000 \times 0{,}90 = 1\,800$). Cela nous donne $2\,000 - 6n = 1\,800$ c'est-à-dire $200 - 6n = 0$ c'est-à-dire $200 = 6n$ c'est-à-dire $n = \dfrac{200}{6}$ c'est-à-dire $n \simeq 33$. Ainsi c'est au 34e jour, c'est-à-dire le 19 mai, que l'éleveur possédera moins de 90 % de poulets.

EXERCICE 2 Les nénuphars et la rumeur

a Modélisons la situation par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de nénuphars présents dans l'étang l'année $2024 + n$. D'après l'énoncé, on a $u_0 = 3$ (car en 2024, il y a trois nénuphars). Comme le nombre de nénuphars double chaque année, on a donc $u_{n+1} = u_n \times 2$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$. Comme $q > 1$ la suite (u_n) est croissante. La formule $u_n = u_0 \times q^n$ nous donne $u_n = 3 \times 2^n$. Résolvons l'équation $u_n = 300$. Cela nous donne $3 \times 2^n = 300$ c'est-à-dire $2^n = \dfrac{300}{3} = 100$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$.
Ainsi c'est en 2031 que le nombre de nénuphars sera supérieur à 300.

b Modélisons la situation par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de personnes informées de la rumeur au $n+1$-ième jour. D'après l'énoncé, on a $u_0 = 1$ (car une seule personne a lancé la rumeur). Comme le nombre de personnes informées triple chaque jour (car chaque personne en informe deux) on a donc $u_{n+1} = u_n \times 3$. (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 3$. Comme $q > 1$ la suite (u_n) est croissante. La formule $u_n = u_0 \times q^n$ nous donne $u_n = 1 \times 3^n$ c'est-à-dire $u_n = 3^n$. Résolvons l'équation $u_n = 2\,000$. Cela nous donne $3^n = 2\,000$. Or $3^6 = 729$ et $3^7 = 2\,187$. Ainsi c'est au bout de huit jours que le village entier sera informé de la rumeur.

EXERCICE 3 Placement à intérêts simples, placement à intérêts composés

Modélisons le placement A par la suite (a_n) où a_n désigne l'argent disponible sur le compte A le 1er janvier $2024 + n$. D'après l'énoncé, on a $a_0 = 1\,000$. Comme les intérêts simples s'élèvent à 50 € (car $1\,000 \times 0{,}05 = 50$), on a : $a_{n+1} = a_n + 50$. (a_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 50$. Comme $r > 0$ la suite (a_n) est croissante. Enfin, la formule $a_n = a_0 + nr$ nous donne $a_n = 1\,000 + 50n$.

Modélisons le placement B par la suite (b_n) où b_n désigne l'argent disponible sur le compte B le 1er janvier $2024 + n$. D'après l'énoncé, on a $b_0 = 1\,000$. Comme les intérêts composés sont de 3 % on a $b_{n+1} = b_n \times 1{,}03$ (car $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$). (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$. Comme $q > 1$ la suite (b_n) est croissante. Enfin, la formule $b_n = b_0 \times q^n$ nous donne $b_n = 1\,000 \times 1{,}03^n$.

Le 1er janvier 2025, la somme disponible sur :

- le compte A sera de $a_1 = 1\,000 + 50 \times 1 = 1\,050$ (€);
- le compte B sera de $b_1 = 1\,000 \times 1{,}03^1 = 1\,030$ (€).

Le 1er janvier 2026, la somme disponible sur :

- le compte A sera de $a_2 = 1\,000 + 50 \times 2 = 1\,100$ (€);
- le compte B sera de $b_2 = 1\,000 \times 1{,}03^2 = 1\,060{,}9$ (€).

b On utilise le programme suivant

```
def a(n) :
    return 1000+50*n
def b(n) :
    return 1000*1.03**n
i=1
while a(i)>b(i) :
    i=i+1
print (i)
```

Après avoir appuyé sur F5, le programme nous affiche 33.

Cela signifie qu'en 2057, la somme disponible sur le compte B sera supérieure à celle du compte A.